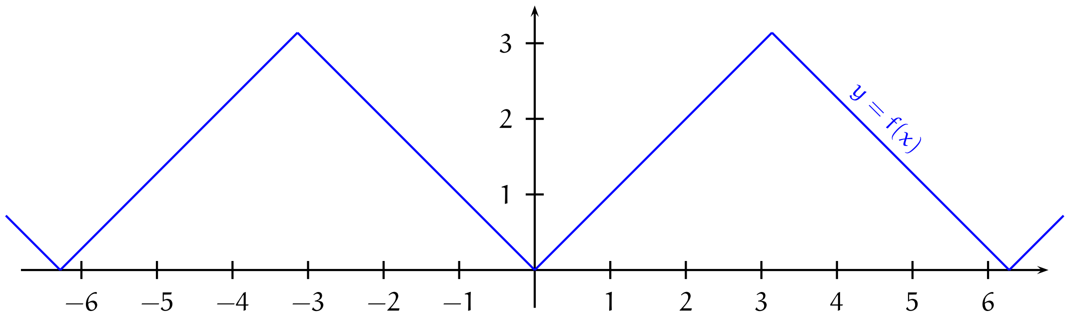
Calculs de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1) 1er calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. De nombreux développements en série de Fourier fournissent la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. En voici un exemple.

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique telle que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = |x|$.



f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux et donc, d'après le théorème de Dirichlet, en tout réel x, la série de Fourier de f converge vers $f(x)$.

b) Calcul des coefficients de Fourier de f.

f est paire et donc $\forall n \geq 1$, $b_n(f) = 0$ puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)\ dt$.

- $a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\ dt = \pi$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)\ dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\ dt\right) = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi -\sin(nt)\ dt \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}.
\end{aligned}$$

c) Puisque f est somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$, on obtient pour tout réel x

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

En particulier

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

$x = 0$ fournit alors $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = 0$ et donc $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Enfin

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8}$$

et donc $S = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2) 2eme calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ (version maths sup). Le travail précédent peut être effectué « à la main » en maths sup. On établit d'abord un outil capital de la démonstration du théorème de Dirtichlet : le lemme de Lebesgue.

a/ Une expression de $\dfrac{1}{n^2}$ sous forme intégrale.

On cherche des réels a et b tels que $\forall n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^{\pi}(at^2+bt)\cos(nt)\ dt = \frac{1}{n^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}(at^2+bt)\cos(nt)\ dt &= \left[(at^2+bt)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(2at+b)\sin(nt)\ dt = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(2at+b)(-\sin(nt))\ dt\\ &= \frac{1}{n}\left(\left[(2at+b)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(2a)\frac{\cos(nt)}{n}\ dt\right)\\ &= \frac{1}{n^2}((2a\pi+b)(-1)^n - b) - \frac{2a}{n^2}\int_0^{\pi}\cos(nt)\ dt = \frac{((-1)^n(2a\pi+b)-b)}{n^2}.\end{aligned}$$

Maintenant, si les réels a et b vérifient $2a\pi+b=0$ et $-b=1$ ou encore si $b=-1$ et $a=\dfrac{1}{2\pi}$, alors $\forall n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^{\pi}(at^2+bt)\cos(nt)\ dt = \frac{1}{n^2}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\ dt.$$

b) Expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ sous forme intégrale.

i) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. D'après a),

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\ dt = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\ dt.$$

ii) Calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$.

1er calcul. Soit t un réel et n un entier naturel non nul.

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}(e^{ikt}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikt}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}(e^{it})^k\right).$$

- Si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors chaque $\cos(kt)$ vaut 1 et dans ce cas, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = n$.
- Si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{it} \neq 1$ et dans ce cas

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}(e^{it})^k\right) = \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})t}\frac{e^{-int/2}-e^{int/2}}{e^{-it/2}-e^{it/2}}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{nt}{2}\right)\cos\left(\dfrac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)-\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=-\frac{1}{2}+\varphi_n(t)\ \text{où}\ \varphi_n(t)=\left\{\begin{array}{l}n+\dfrac{1}{2}\ \text{si}\ t\in 2\pi\mathbb{Z}\\ \dfrac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\ \text{si}\ t\notin 2\pi\mathbb{Z}\end{array}\right..$$

2ème calcul. Soient t un réel et n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)&=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2})t\right)-\sin\left(k-\frac{1}{2})t\right)\\&=\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)\ \text{(somme télescopique).}\end{aligned}$$

et pour $t\notin 2\pi\mathbb{Z}$, on retrouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$.

iii) D'après ce qui précède, φ_n est continue sur $[0,\pi]$ (car pour tout t de $[0,\pi]$, $\varphi_n(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$) et pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}&=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(-\frac{1}{2}+\varphi_n(t)\right)\,dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi}-\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\varphi_n(t)\,dt\\&=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\varphi_n(t)\,dt.\end{aligned}$$

Maintenant, pour $t\in]0,\pi]$, $\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)\varphi_n(t)=\dfrac{\dfrac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)$. Pour $t\in]0,\pi]$, on pose alors $f(t)=\dfrac{\dfrac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$.

f est continue sur $]0,\pi]$. De plus, quand t tend vers 0, $f(t)\sim\dfrac{-t}{2\dfrac{t}{2}}=-1$. f se prolonge donc par continuité en 0 en posant $f(0)=-1$.

En résumé,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\,dt\ \text{où}\ f(t)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\dfrac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\ \text{si}\ t\in]0,\pi]\\ -1\ \text{si}\ t=0\end{array}\right..$$

Il reste à étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ de l'expression précédente, f étant continue sur $[0,\pi]$.

c) Le lemme de Lebesgue. Il s'agit de montrer que pour toute fonction f continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt=0$ et donc aussi $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt=0$.

i) Cas des fonctions de classe C^1.

Soit f une fonction de classe C^1 sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une intégration par parties, licite puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$ fournit pour $\lambda>0$

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = \frac{1}{i\lambda}\left(\left[f(t)e^{i\lambda t}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)e^{i\lambda t}\,dt\right) = \frac{1}{i\lambda}\left(f(b)e^{i\lambda b} - f(a)e^{i\lambda a} - \int_a^b f'(t)e^{i\lambda t}\,dt\right),$$

et donc, pour $\lambda > 0$

$$\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \leq \frac{1}{\lambda}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right).$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$ ce qui démontre le lemme de LEBESGUE pour les fonctions de classe C^1 sur un segment.

ii) Cas des fonctions continues par morceaux.

On a d'abord $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b e^{i\lambda t}\,dt = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda} = 0$ ce qui démontre le lemme de LEBESGUE quand f est la fonction constante 1.

Mais alors, par linéarité de l'intégrale puis additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, le lemme de LEBESGUE est démontré pour les fonctions en escaliers sur $[a, b]$.

Soit maintenant f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe g une fonction en escaliers sur $[a, b]$ telle que $\forall t \in [a, b]$, $|f(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (approximation uniforme sur un segment d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escaliers).

Pour $\lambda > 0$, on a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| &= \left|\int_a^b (f(t) - g(t))e^{i\lambda t}\,dt + \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - g(t)|\,dt + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,dt + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| = \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\,dt\right|.\end{aligned}$$

Maintenant, puisque g est en escaliers sur $[a, b]$, il existe $\Lambda > 0$ tel que, pour $\lambda \geq \Lambda$, $\left|\int_a^b g(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \Lambda > 0 /\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \left(\lambda \geq \Lambda \Rightarrow \left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| < \varepsilon\right)$ et donc

Lemme de LEBESGUE pour les fonctions continues par morceaux sur un segment.
Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = 0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt = 0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0,$$

les deux dernières limites étant obtenues par passage aux parties réelles et imaginaires.

d) Calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

La fonction f définie en b) est continue sur $[0, \pi]$ et d'après le lemme de LEBESGUE, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\,dt = 0$. Le b) montre alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

e) Calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Posons $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $S' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. On a $S - S' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^2} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{2}S$ et donc

$S' = \frac{1}{2}S = \frac{\pi^2}{12}$. On a aussi $S + S' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{n^2} = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et donc $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{2}(S+S') = \frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3) 3ème calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k^2}$.

a) Calcul de $\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ et de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$. Pour α réel et n entier naturel non nul donnés, on a

$$\cos((2n+1)\alpha) + i\sin((2n+1)\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} i^k C_{2n+1}^{k} \cos^{2n+1-k}\alpha \sin^k \alpha.$$

puis par identification des parties imaginaires

$$\sin((2n+1)\alpha = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} \cos^{(2n+1)-(2k+1)}\alpha \sin^{2k+1}\alpha,$$

et enfin en divisant les deux membres par $\sin^{2n+1}\alpha$ pour $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, on obtient

$$\frac{\sin((2n+1)\alpha)}{\sin^{2n+1}\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} \frac{\cos^{2n-2k}\alpha}{\sin^{2n-2k}\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} (\text{cotan}^2 \alpha)^{n-k}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ \frac{\sin((2n+1)\alpha)}{\sin^{2n+1}\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} (\text{cotan}^2 \alpha)^{n-k}.$$

Posons alors $P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} X^{n-k}$. Posons aussi, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$.

Tout d'abord, pour $1 \leq k \leq n$, on a $0 < \frac{k\pi}{2n+1} \leq \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi les nombres $\frac{k\pi}{2n+1}$, $1 \leq k \leq n$, sont deux à deux distincts et dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. Par injectivité de la fonction $x \mapsto \text{cotan}\, x$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, les n nombres $\text{cotan} \frac{k\pi}{2n+1}$, $1 \leq k \leq n$, sont deux à deux distincts et de plus strictement positifs. Finalement, les n réels x_k sont deux à deux distincts.
Maintenant, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $P(x_k) = \frac{\sin(k\pi)}{\sin^{2n+1} \frac{k\pi}{2n+1}} = 0$. On a donc trouvé n réels deux à deux distincts racines du polynôme P qui est de degré n. Les relations entre coefficients et racines d'un polynôme permettent d'affirmer que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{-C_{2n+1}^{3}}{C_{2n+1}^{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)/6}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Ensuite, pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \text{cotan}^2 x$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = \sum_{k=1}^{n} (1 + \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}) = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

b) Pour x dans $]0, \dfrac{\pi}{2}[$, on a $\sin x < x < \tan x$.

Les fonctions sin et tan sont respectivement strictement concaves et strictement convexes sur $]0, \dfrac{\pi}{2}[$. On en déduit que les graphes de ces fonctions sont respectivement strictement au-dessous et strictement au-dessus de leur tangente en $(0, 0)$ sur $]0, \dfrac{\pi}{2}[$ et donc

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ \sin x < x < \tan x.$$

Puisque, pour $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, $0 < \sin x < x < \tan x$, on a aussi après passage à l'inverse et élévation au carré

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ \text{cotan}^2\, x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

c) Encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n+1}$ est dans $]0, \dfrac{\pi}{2}[$ et d'après b), $\text{cotan}^2 \dfrac{k\pi}{2n+1} < \dfrac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} < \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}}$. En sommant ces inégalités, on obtient d'après a)

$$\frac{n(2n-1)}{3} = \sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}} = \frac{2n(n+1)}{3},$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\pi^2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{2n(n+1)}{3(2n+1)^2}\pi^2.$$

d) Calcul de $\zeta(2)$. Les membres de gauche et de droite de l'encadrement précédent tendent tous deux vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ quand n tend vers $+\infty$ et on retrouve donc $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

